

文章编号:1000-8055(2011)11-2601-09

偏心与齿频误差对封闭差动人字齿轮 传动系统动态均载特性的影响分析

朱增宝^{1,2}, 朱如鹏¹, 鲍和云¹, 靳广虎¹

(1. 南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016;

2. 安徽理工大学 机械工程学院, 安徽 淮南 232001)

摘 要: 基于集中参数理论,建立了封闭差动人字齿轮传动系统动力学模型,模型中考虑了支撑的弹性变形、啮合齿轮副的时变啮合刚度激励、误差激励以及中间浮动构件的影响.引入斜齿轮啮合刚度公式按并联方式计算了人字齿时变啮合刚度,采用傅里叶级数法求解系统动力学方程,获得了系统动态均载系数,分析了偏心与齿频误差对系统均载特性的影响.研究表明:差动级均载系数对齿频误差敏感,随齿频误差的增加而增大,均载系数基本不受偏心误差的影响;封闭级均载系数对偏心误差敏感,随偏心误差的增加而增大,均载系数基本不受齿频误差的影响;齿频误差对差动级均载系数的影响比偏心误差对封闭级均载系数的影响大,差动级均载系数大于封闭级均载系数.

关 键 词: 封闭差动行星传动; 误差; 人字齿; 动力学; 均载

中图分类号: TH132

文献标志码: A

Impact of run-out and meshing-frequency errors on dynamic load sharing for encased differential herringbone train

ZHU Zeng-bao^{1,2}, ZHU Ru-peng¹, BAO He-yun¹, JIN Guang-hu¹

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Mechanical Engineering,
Anhui University of Science and Technology, Huainan Anhui 232001, China)

Abstract: Based on the theory of concentrated parameter, a dynamics model of the encased differential herringbone train was set up. The elastic deformation of the bearings, the time-varying meshing stiffness, the errors and the intermediate floating component were considered in the model. The helical gear meshing stiffness formula was introduced to calculate the time-varying mesh stiffness of herringbone in parallel way. Through solving of the dynamic equation by Fourier series method, the dynamic load sharing coefficients of the train were acquired and the impact of run-out and meshing-frequency errors on the load sharing was analyzed. The research results show that the load sharing coefficient of the differential stage affects the meshing-frequency errors greatly, it is increased with the meshing-frequency errors and is seldom influenced by the run-out errors. The load sharing coefficient of the encased stage is very sensitive to the run-out errors, it is largened with the run-out er-

收稿日期:2010-10-16; 修订日期:2011-10-07

基金项目:国家自然科学基金(7150080050); 航空科技创新基金(08B52004)

作者简介:朱增宝(1967-),男,安徽淮南人,副教授,博士生,主要从事机械设计与机械传动研究.

rors and is hardly affected by the meshing-frequency errors. The meshing-frequency errors have greater influences on the load sharing coefficient of the differential stage than run-out errors' on that of the encased stage, so the differential stage has a bigger load sharing coefficient than the encased stage.

Key words: encased differential planetary train; errors; herringbone; dynamics; load sharing

封闭差动行星传动系统是单自由度星型轮系(封闭级)封闭二自由度差动行星轮系(差动级)的组合传动机构. 该传动系统利用多个行星轮(星轮)来分担载荷, 形成功率分流, 具有体积小、质量轻、承载能力强等优点, 在航空发动机主减速器、起重机构和船舶动力传动系统等很多领域得到广泛应用. 各个行星轮(星轮)间载荷分配的均匀性是行星传动系统需要解决的重要问题, 它直接关系到传动系统的使用寿命、运转平稳性和工作可靠性, 因此, 进行封闭差动行星传动系统均载特性的研究具有重要的工程背景.

由齿轮加工、安装误差引起的齿廓表面相对于理想齿廓位置的偏移是齿轮系统的误差激励. 误差激励是啮合轮齿间的一种周期性位移激励. 研究误差激励对系统的影响, 了解各种轮齿误差与系统动态特性的关系, 可以为齿轮设计中精度等级的确定和加工方法的选择提供指导^[1].

20 世纪 80 年代至今, 国外学者^[2-7]对行星齿轮传动均载特性进行许多理论及实验研究, 国内方宗德和袁茹等^[8-9]研究了行星传动的动态特性, 孙智民等^[10]研究了转速变化对封闭差动行星传动系统动载特性的影响. 这些研究主要针对直齿轮的传动系统, 模型中没有包含中间浮动构件. 目前, 关于误差对封闭差动行星传动系统动态均载特性的研究还未见报道. 本文考虑了中间浮动构件的影响, 基于集中参数理论, 建立了封闭差动人字齿轮传动系统动力学计算模型, 分析了偏心与齿频误差对系统动态均载特性的影响, 研究工作对人字齿封闭差动行星传动系统的设计具有指导意义.

1 传动系统的动力学模型

封闭差动人字齿轮传动系统简图如图 1 所示, 系统由差动级(太阳轮 Z_{s1} 、行星轮 Z_{pi} ($i=1, 2, \dots, N$)、内齿轮 Z_{r1} 、行星架 H 、中间浮动构件 Z_{g1} 、浮动齿圈 Z_{f1})和封闭级(太阳轮 Z_{s2} 、星轮 Z_{mj} ($j=1, 2, \dots, M$)、内齿轮 Z_{r2} 、中间浮动构件 Z_{g2} 、浮动齿圈 Z_{f2})相联接组成. 输入扭矩 T_d 经差动级

太阳轮 Z_{s1} 分流到行星架 H 和内齿轮 Z_{r1} , 通过中间浮动构件 Z_{g1} 和浮动齿圈 Z_{f1} 传至封闭级, 然后再分别由行星架 H 和封闭级浮动齿圈 Z_{f2} 汇流到输出轴 L 上.

文中 N 表示行星轮个数, M 表示星轮个数, s, p, m, r 分别表示太阳轮、行星轮、星轮和内齿轮.

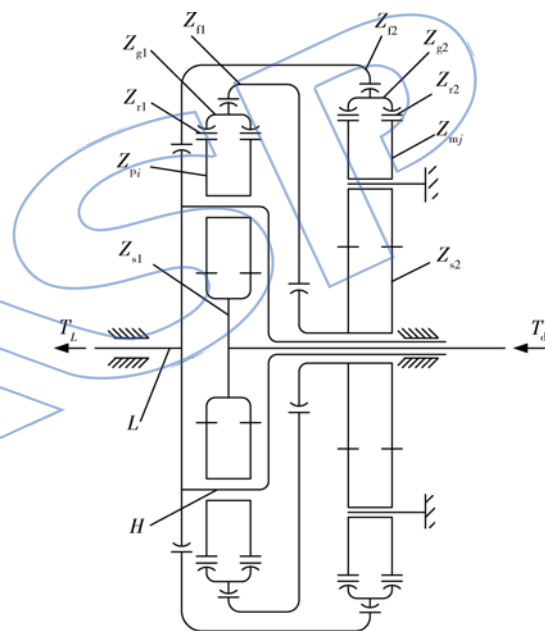


图 1 封闭差动人字齿轮传动系统简图

Fig. 1 Sketch of the encased differential herringbone train

图 2 为系统的动力学模型. 图 2(a)为差动级动力学模型, 采用以行星架转速 ω_H 旋转的动坐标系; 图 2(b)为封闭级动力学模型, 采用固定坐标系. 系统两级采用中心轮(太阳轮和内齿轮)浮动均载措施. 系统的动力学模型中包含了中间浮动构件 Z_{g1} 和 Z_{g2} , 该中间浮动构件也称双齿联轴器, 是不可缺少的弹性构件, 能够起到均衡载荷的作用.

图 2 中: K_{HL} , K_{f1s2} 和 K_{f2L} 分别为联接 H 与 L , Z_{f1} 与 Z_{s2} 和 Z_{f2} 与 L 的扭转刚度; K_{s1} , K_{r1} , K_{s2} 和 K_{r2} 分别为齿轮 Z_{s1} , Z_{r1} , Z_{s2} 和 Z_{r2} 支轴弯曲刚度; K_H 为行星架 H 在行星轮 Z_{pi} 公转半径 r_H 上

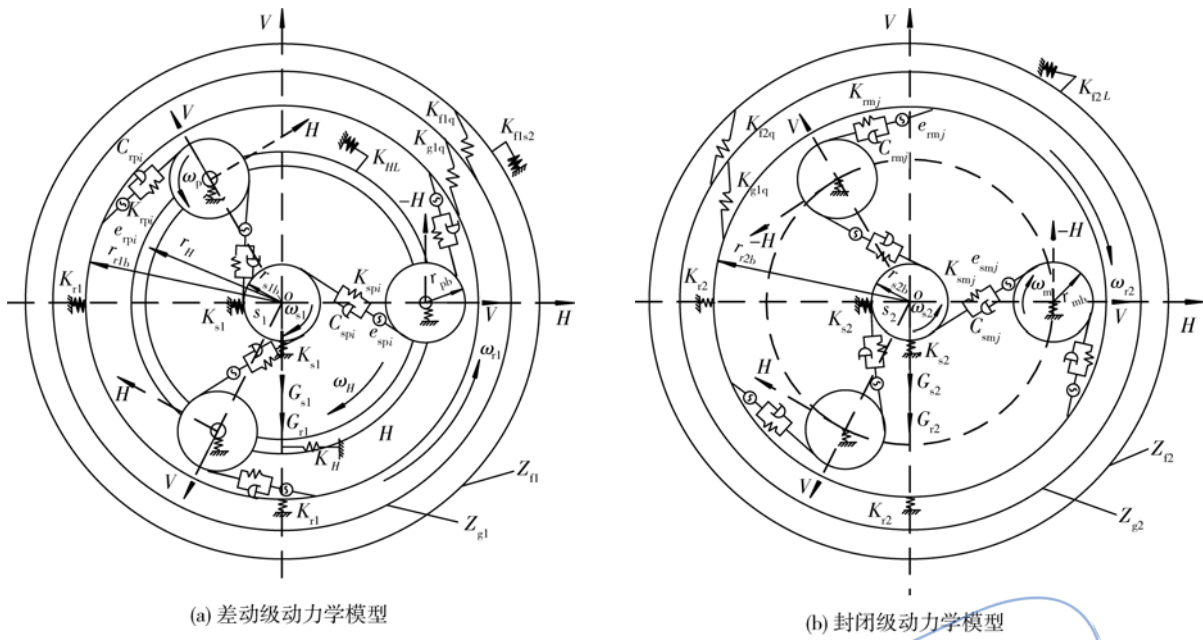


图 2 封闭差动人字齿轮传动系统动力学模型

Fig. 2 Dynamic model of the enclosed differential herringbone train

的等效切向刚度; K_{g1q} , K_{f1q} , K_{g2q} 和 K_{f2q} 分别为 Z_{r1} 与 Z_{g1} , Z_{g1} 与 Z_{f1} , Z_{r2} 与 Z_{g2} 和 Z_{g2} 与 Z_{f2} 接触的切向刚度; G_{s1} , G_{r1} , G_{s2} 和 G_{r2} 分别为齿轮 Z_{s1} , Z_{r1} , Z_{s2} 和 Z_{r2} 的质量。

封闭差动人字齿轮传动系统共有 $(18 + N + M)$ 个自由度, 其广义位移列向量 $\mathbf{X}$ 表示为

$$\mathbf{X} = \{x_{s1}, H_{s1}, V_{s1}, x_{p1}, x_{r1}, H_{r1}, V_{r1}, x_{g1}, x_{f1}, x_{s2}, H_{s2}, V_{s2}, x_{mj}, x_{r2}, H_{r2}, V_{r2}, x_{g2}, x_{f2}, x_H, x_L\}^T \quad (1)$$

式中 x_{s1} , x_{p1} , x_{r1} , x_{s2} , x_{mj} 和 x_{r2} 分别为齿轮 Z_{s1} , Z_{p1} , Z_{r1} , Z_{s2} , Z_{mj} 和 Z_{r2} 沿基圆扭转的线位移; x_{g1} , x_{f1} , x_{g2} 和 x_{f2} 分别为构件 Z_{g1} , Z_{f1} , Z_{g2} 和 Z_{f2} 沿分度

圆扭转的线位移; x_H 为行星架 H 在其半径 r_H 的线位移; x_L 为输出轴 L 与浮动齿圈 Z_{f2} 接触处的线位移; H_{s1} , V_{s1} 和 H_{r1} , V_{r1} 分别为齿轮 Z_{s1} 和 Z_{r1} 中心在旋转坐标系中的横向、纵向位移; H_{s2} , V_{s2} 和 H_{r2} , V_{r2} 分别为齿轮 Z_{s2} 和 Z_{r2} 中心在水平、垂直方向的位移。

2 系统的动力学平衡方程

令 P_{spi} , P_{rpi} , P_{smj} 和 P_{rmj} 分别为齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{p1} , Z_{p1} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间的弹性啮合力, 则齿轮弹性啮合力如式 (2) 所示, 由式 (2a) ~ (2d) 组成

$$P_{spi} = K_{spi} \left[x_{s1} - x_{pi} + H_{s1} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + V_{s1} \cos \left[\alpha_1 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - e_{spi}(t) \right] \quad (2a)$$

$$P_{rpi} = K_{rpi} \left[x_{pi} - x_{r1} - H_{r1} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - V_{r1} \cos \left[\pi - \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - e_{rpi}(t) \right] \quad (2b)$$

$$P_{smj} = K_{smj} \left[x_{s2} - x_{mj} + H_{s2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_3 + \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] + V_{s2} \cos \left[\alpha_3 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - e_{smj}(t) \right] \quad (2c)$$

$$P_{rmj} = K_{rmj} \left[x_{mj} - x_{r2} - H_{r2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_4 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - V_{r2} \cos \left[\pi - \alpha_4 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - e_{rmj}(t) \right] \quad (2d)$$

式 (2) 中 K_{spi} , K_{rpi} , K_{smj} 和 K_{rmj} 分别为齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{p1} , Z_{p1} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间时变

啮合刚度; α_1 , α_2 , α_3 和 α_4 分别为齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{p1} , Z_{p1} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 啮合角; $e_{spi}(t)$,

$e_{\text{rpi}}(t)$, $e_{\text{smj}}(t)$ 和 $e_{\text{rmj}}(t)$ 分别表示偏心误差和齿频误差在齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{pi} , Z_{pi} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 啮合线上等效位移; $2\pi(i-1)/N$ 表示第 i 个行星轮相对于第一个行星轮位置角; $2\pi(j-1)/M$ 表示第 j 个星轮相对于第一个星轮位置角。

令 D_{spi} , D_{rpi} , D_{smj} 和 D_{rmj} 分别为齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{pi} , Z_{pi} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间的啮合阻尼力, 则齿轮啮合阻尼力如式(3)所示, 由式(3a)~(3d)组成

$$D_{\text{spi}} = C_{\text{sp}} \left[\dot{x}_{\text{s1}} - \dot{x}_{\text{pi}} + \dot{H}_{\text{s1}} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + \dot{V}_{\text{s1}} \cos \left[\alpha_1 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - \dot{e}_{\text{spi}}(t) \right] \quad (3a)$$

$$D_{\text{rpi}} = C_{\text{rp}} \left[\dot{x}_{\text{pi}} - \dot{x}_{\text{r1}} - \dot{H}_{\text{r1}} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - \dot{V}_{\text{r1}} \cos \left[\pi - \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] - \dot{e}_{\text{rpi}}(t) \right] \quad (3b)$$

$$D_{\text{smj}} = C_{\text{sm}} \left[\dot{x}_{\text{s2}} - \dot{x}_{\text{mj}} + \dot{H}_{\text{s2}} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_3 + \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] + \dot{V}_{\text{s2}} \cos \left[\alpha_3 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - \dot{e}_{\text{smj}}(t) \right] \quad (3c)$$

$$D_{\text{rmj}} = C_{\text{rm}} \left[\dot{x}_{\text{mj}} - \dot{x}_{\text{r2}} - \dot{H}_{\text{r2}} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_4 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - \dot{V}_{\text{r2}} \cos \left[\pi - \alpha_4 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] - \dot{e}_{\text{rmj}}(t) \right] \quad (3d)$$

式(3)中 C_{sp} , C_{rp} , C_{sm} 和 C_{rm} 分别为齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{pi} , Z_{pi} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间的阻尼系数。

封闭差动人字齿轮传动系统动力学方程如式(4)所示, 由式(4a)~(4l)组成

$$\begin{cases} m_{\text{s1}} \ddot{x}_{\text{s1}} + \sum_{i=1}^N (P_{\text{spi}} + D_{\text{spi}}) = P_{\text{d}} \\ M_{\text{s1}} \ddot{H}_{\text{s1}} + \sum_{i=1}^N (P_{\text{spi}} + D_{\text{spi}}) \sin \left[\alpha_1 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + K_{\text{s1}} H_{\text{s1}} = -G_{\text{s1}} \sin(\omega_{\text{H}} t) \\ M_{\text{s1}} \ddot{V}_{\text{s1}} + \sum_{i=1}^N (P_{\text{spi}} + D_{\text{spi}}) \cos \left[\alpha_1 - \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + K_{\text{s1}} V_{\text{s1}} = -G_{\text{s1}} \cos(\omega_{\text{H}} t) \end{cases} \quad (4a)$$

$$m_{\text{p}} \ddot{x}_{\text{pi}} - (P_{\text{spi}} + D_{\text{spi}}) + (P_{\text{rpi}} + D_{\text{rpi}}) = 0 \quad (4b)$$

$$\begin{cases} m_{\text{r1}} \ddot{x}_{\text{r1}} - \sum_{i=1}^N (P_{\text{rpi}} + D_{\text{rpi}}) + K_{\text{g1q}}(x_{\text{r1}} - x_{\text{g1}}) = 0 \\ M_{\text{r1}} \ddot{H}_{\text{r1}} - \sum_{i=1}^N (P_{\text{rpi}} + D_{\text{rpi}}) \sin \left[\alpha_2 + \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + K_{\text{r1}} H_{\text{r1}} = -G_{\text{r1}} \sin(\omega_{\text{H}} t) \\ M_{\text{r1}} \ddot{V}_{\text{r1}} + \sum_{i=1}^N (P_{\text{rpi}} + D_{\text{rpi}}) \cos \left[\alpha_2 + \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] + K_{\text{r1}} V_{\text{r1}} = -G_{\text{r1}} \cos(\omega_{\text{H}} t) \end{cases} \quad (4c)$$

$$m_{\text{g1}} \ddot{x}_{\text{g1}} - K_{\text{g1q}}(x_{\text{r1}} - x_{\text{g1}}) + K_{\text{flq}}(x_{\text{g1}} - x_{\text{fl}}) = 0 \quad (4d)$$

$$m_{\text{fl}} \ddot{x}_{\text{fl}} - K_{\text{flq}}(x_{\text{g1}} - x_{\text{fl}}) + \frac{K_{\text{fls2}}}{r_{\text{flb}}} \left(\frac{x_{\text{fl}}}{r_{\text{flb}}} - \frac{x_{\text{s2}}}{r_{\text{s2b}}} \right) = 0 \quad (4e)$$

$$\begin{cases} m_{\text{s2}} \ddot{x}_{\text{s2}} + \sum_{j=1}^M (P_{\text{smj}} + D_{\text{smj}}) - \frac{K_{\text{fls2}}}{r_{\text{s2b}}} \left(\frac{x_{\text{fl}}}{r_{\text{flb}}} - \frac{x_{\text{s2}}}{r_{\text{s2b}}} \right) = 0 \\ M_{\text{s2}} \ddot{H}_{\text{s2}} + \sum_{j=1}^M (P_{\text{smj}} + D_{\text{smj}}) \sin \left[\alpha_3 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] + K_{\text{s2}} H_{\text{s2}} = 0 \\ M_{\text{s2}} \ddot{V}_{\text{s2}} + \sum_{j=1}^M (P_{\text{smj}} + D_{\text{smj}}) \cos \left[\alpha_3 - \frac{2\pi}{M}(j-1) \right] + K_{\text{s2}} V_{\text{s2}} = -G_{\text{s2}} \end{cases} \quad (4f)$$

$$m_{\text{m}} \ddot{x}_{\text{mj}} - (P_{\text{smj}} + D_{\text{smj}}) + (P_{\text{rmj}} + D_{\text{rmj}}) = 0 \quad (4g)$$

$$\begin{cases} m_{r2} \ddot{x}_{r2} - \sum_{j=1}^M (P_{mj} + D_{mj}) + K_{g2q} (x_{r2} - x_{g2}) = 0 \\ M_{r2} \ddot{H}_{r2} - \sum_{j=1}^M (P_{mj} + D_{mj}) \sin \left[\alpha_i + \frac{2\pi}{M} (j-1) \right] + K_{r2} H_{r2} = 0 \end{cases} \quad (4h)$$

$$\begin{cases} M_{r2} \ddot{V}_{r2} + \sum_{j=1}^M (P_{mj} + D_{mj}) \cos \left[\alpha_i + \frac{2\pi}{M} (j-1) \right] + K_{r2} V_{r2} = -G_{r2} \\ m_{g2} \ddot{x}_{g2} - K_{g2q} (x_{r2} - x_{g2}) + K_{f2q} (x_{g2} - x_{f2}) = 0 \end{cases} \quad (4i)$$

$$m_{f2} \ddot{x}_{f2} - K_{f2q} (x_{g2} - x_{f2}) + \frac{K_{f2L}}{r_{f2b}} \left(\frac{x_{f2}}{r_{f2b}} - \frac{x_L}{r_L} \right) = 0 \quad (4j)$$

$$m_H \ddot{x}_H - \sum_{i=1}^N K_p (x_H - V_{pi}) + \frac{K_{HL}}{r_H} \left(\frac{x_H}{r_H} - \frac{x_L}{r_L} \right) = 0 \quad (4k)$$

$$m_L \ddot{x}_L - \frac{K_{HL}}{r_L} \left(\frac{x_H}{r_H} - \frac{x_L}{r_L} \right) - \frac{K_{f2L}}{r_{f2b}^2} \left(x_{f2} - \frac{x_L}{r_L} r_{f2b} \right) = -P_L \quad (4l)$$

式中(4) m_{s1} , m_p , m_{r1} , m_{s2} , m_m 和 m_{r2} 分别为齿轮 Z_{s1} , Z_{pi} , Z_{r1} , Z_{s2} , Z_{mj} 和 Z_{r2} 在各自基圆半径上等效质量; m_{g1} , m_{f1} , m_{g2} 和 m_{f2} 分别为构件 Z_{g1} , Z_{f1} , Z_{g2} 和 Z_{f2} 在各自分度圆半径上等效质量; m_H 为行星架 H 在行星轮公转半径 r_H 上的等效质量; m_L 为输出轴 L 在 Z_{f2} 接触处 r_L 上的等效质量; M_{s1} , M_{r1} , M_{s2} 和 M_{r2} 分别为齿轮 Z_{s1} , Z_{r1} , Z_{s2} 和 Z_{r2} 的质量; P_d 为输入转矩在齿轮 Z_{s1} 基圆半径 r_{s1b} 上的等效力, $P_d = T_d / r_{s1b}$; P_L 为负载转矩在输出轴 L 与浮动齿圈 Z_{f2} 接触处的基圆半径 r_L 上的等效力,

$$P_L = T_L / r_L.$$

3 误差等效位移和时变啮合刚度

3.1 误差等效位移

用齿轮偏心误差表示安装和制造误差, 认为安装和制造误差包含在齿轮偏心误差中; 齿轮传动的齿形制造传递误差用齿频误差来表示. 把齿轮的偏心误差和齿频误差分别转化到齿轮副啮合线上, 经叠加得到的误差等效位移如式(5)所示, 由式(5a)~(5d)组成

$$e_{spi}(t) = E_{spi} \sin(\omega_i t + \varphi_{pi}) - E_{pi} \sin(\omega_{pH} t + \varphi_{pi} - \alpha_1) - E_{s1} \sin \left[\omega_{sH} t - \frac{2\pi}{N} (i-1) - \varphi_{s1} + \alpha_1 \right] \quad (5a)$$

$$e_{rpi}(t) = E_{rpi} \sin(\omega_i t + \varphi_{pi}) - E_{pi} \sin(\omega_{pH} t + \varphi_{pi} + \alpha_2) - E_{r1} \sin \left[\omega_{rH} t - \frac{2\pi}{N} (i-1) + \varphi_{r1} - \alpha_2 \right] \quad (5b)$$

$$e_{smj}(t) = E_{smj} \sin(\omega_2 t + \varphi_{mj}) - E_{mj} \sin(\omega_m t + \varphi_{mj} - \alpha_3) - E_{s2} \sin \left[\omega_2 t - \frac{2\pi}{M} (j-1) - \varphi_{s2} + \alpha_3 \right] \quad (5c)$$

$$e_{rmj}(t) = E_{rmj} \sin(\omega_2 t + \varphi_{mj}) - E_{mj} \sin(\omega_m t + \varphi_{mj} + \alpha_4) - E_{r2} \sin \left[\omega_2 t - \frac{2\pi}{M} (j-1) + \varphi_{r2} - \alpha_4 \right] \quad (5d)$$

式(5)中 E_{s1} , E_{pi} , E_{r1} , E_{s2} , E_{mj} 和 E_{r2} 分别表示齿轮 Z_{s1} , Z_{pi} , Z_{r1} , Z_{s2} , Z_{mj} 和 Z_{r2} 的偏心误差幅值; φ_{s1} , φ_{pi} , φ_{r1} , φ_{s2} , φ_{mj} 和 φ_{r2} 分别表示齿轮 Z_{s1} , Z_{pi} , Z_{r1} , Z_{s2} , Z_{mj} 和 Z_{r2} 偏心误差的初相位; E_{spi} , E_{rpi} , E_{smj} 和 E_{rmi} 分别表示齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{pi} , Z_{pi} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间的齿频误差幅值; φ_{spi} , φ_{rpi} , φ_{smj} 和 φ_{rmi} 分别表示齿轮副 Z_{s1} 与 Z_{pi} , Z_{pi} 与 Z_{r1} , Z_{s1} 与 Z_{mj} 和 Z_{mj} 与 Z_{r2} 之间齿频误差的初相位; ω_1 和 ω_2 分别为差动级和封闭级的啮合齿频; ω_{sH} , ω_{pH} 和 ω_{rH} 分别为差动级齿轮 Z_{s1} , Z_{pi} 和 Z_{r1} 相对行

星架 H 的相对角速度; ω_{s2} , ω_m 和 ω_{r2} 分别为封闭级齿轮 Z_{s2} , Z_{mj} 和 Z_{r2} 的角速度.

3.2 人字齿时变啮合刚度

人字齿时变啮合刚度采用 Maatar M 等^[11] 推导的斜齿轮刚度公式按刚度并联方式计算, 则时变啮合刚度 $k(t)$ 为

$$k(t) = k_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k\tau - \psi) + B_k \sin(2\pi k\tau - \psi) \right] L_m \quad (6)$$

式中 $\tau = t/T_m$, t 为时间, T_m 为啮频周期; ψ 为各个行星轮(星轮)之间啮合相位差; k_0, A_k, B_k 和 L_m 具体含义见文献[11]. 各个行星轮(星轮)之间以及各个行星轮(星轮)内外啮合的相位差按 Parker R G 等^[12]提供的方法计算.

4 动力学方程求解和均载系数计算

4.1 动力学方程求解

动力学方程用矩阵表示为

$$[M]\{\dot{x}\} + [C]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (7)$$

式中 $[M]$ 为质量矩阵; $[C]$ 为阻尼矩阵; $[K]$ 为刚度矩阵; $\{x\}$ 为自由度向量; $\{P\}$ 为激励力向量.

式(7)是非线性微分方程组, 采用傅里叶级数法^[13]求解. 令

$$\begin{cases} [K] = [\bar{K}] + [\Delta K] \\ \{x\} = \{\bar{x}\} + \{\Delta x\} \end{cases} \quad (8)$$

式中 $[\bar{K}]$ 为平均刚度矩阵; $\{\bar{x}\}$ 为静变形; $[\Delta K]$ 和 $\{\Delta x\}$ 分别为 $[K]$ 和 $\{x\}$ 的波动部分.

将式(8)代入到式(7)中, 考虑到 $\{\dot{x}\} = \{\Delta \dot{x}\}$, $\{\ddot{x}\} = \{\Delta \ddot{x}\}$ 和 $[\bar{K}]\{\bar{x}\} = (P_i, 0, \dots, 0)^T$ (P_i 表示静态齿轮啮合力), 略去二阶小量 $[\Delta K]\{\Delta x\}$, 得

$$[M]\{\Delta \ddot{x}\} + [C]\{\Delta \dot{x}\} + [\bar{K}]\{\Delta x\} = \{F\} \quad (9)$$

式(9)是线性定常微分方程组, $\{F\}$ 包括啮合刚度波动激励、误差激励、重力激励和负载激励.

将 $\{F\}$ 中的啮合刚度波动激励展成以啮合齿频为基频的 Fourier 级数, 差动级和封闭级各取前 5 项, 加上行星架转动角频率和差动级太阳轮、行星轮、内齿轮相对行星架的转动角频率以及封闭级太阳轮、星轮、内齿轮转动角频率, 再加上零频率, 共有 18 阶激励频率. 求得每阶频率响应, 按各阶频率响应的幅值和相位, 根据划分的时间步长, 直接叠加得到相应的时间历程响应.

4.2 均载系数计算

衡量传动系统的载荷分配均衡性用均载系数表示, 均载系数越大, 传动系统载荷分配越不均匀. 封闭差动人字齿轮传动系统用差动级和封闭级的均载系数表示系统载荷分配的均衡性.

采用傅里叶级数法求解式(9)获得系统位移响应, 将位移响应代入式(2)中, 得弹性啮合力 $P_{spi}, P_{rpi}, P_{smj}$ 和 P_{rmj} . 令 b_{spi1} 和 b_{rpi2} 分别为每一啮频周期差动级外啮合和内啮合的均载系数, b_{smj3} 和 b_{rmj4} 分别为每一啮频周期封闭级外啮合和内啮合的均载系数, 则每一啮频周期均载系数为

$$\begin{cases} b_{spi1} = N(P_{spi1})_{\max} / \sum_{i=1}^N (P_{spi1})_{\max} \\ b_{rpi2} = N(P_{rpi2})_{\max} / \sum_{i=1}^N (P_{rpi2})_{\max} \\ b_{smj3} = M(P_{smj3})_{\max} / \sum_{j=1}^M (P_{smj3})_{\max} \\ b_{rmj4} = M(P_{rmj4})_{\max} / \sum_{j=1}^M (P_{rmj4})_{\max} \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} k_1 &= 1, 2, \dots, n_1; & k_2 &= 1, 2, \dots, n_2; \\ k_3 &= 1, 2, \dots, n_3; & k_4 &= 1, 2, \dots, n_4 \end{aligned}$$

n_1 和 n_2 分别为系统周期差动级外啮合和内啮合的啮频周期数; n_3 和 n_4 分别为系统周期封闭级外啮合和内啮合的啮频周期数.

令 B_{spi} 和 B_{rpi} 分别为系统周期差动级外啮合和内啮合的均载系数, B_{smj} 和 B_{rmj} 分别为系统周期封闭级外啮合和内啮合的均载系数, 则系统周期均载系数为

$$\begin{cases} B_{spi} = |b_{spi1} - 1|_{\max} + 1 \\ B_{rpi} = |b_{rpi2} - 1|_{\max} + 1 \\ B_{smj} = |b_{smj3} - 1|_{\max} + 1 \\ B_{rmj} = |b_{rmj4} - 1|_{\max} + 1 \end{cases} \quad (11)$$

则差动级和封闭级均载系数 B_p 和 B_m 为

$$\begin{cases} B_p = \max(B_{spi}, B_{rpi}) \\ B_m = \max(B_{smj}, B_{rmj}) \end{cases} \quad (12)$$

5 均载特性分析

本文针对某封闭差动人字齿轮减速器进行分析. 封闭差动人字齿轮传动系统主要参数为: 差动级模数 $m_1 = 7$ mm, 行星轮个数 $N = 3$, 太阳轮齿数 $Z_{s1} = 37$, 行星轮齿数 $Z_p = 56$, 内齿轮齿数 $Z_{r1} = 149$, 齿宽系数 $\phi_{d1} = 1.2$, 压力角 $\alpha_{n1} = 20^\circ$, 螺旋角 $\beta_1 = 22^\circ$; 封闭级模数 $m_2 = 7$ mm, 星轮个数 $M = 5$, 太阳轮齿数 $Z_{s2} = 71$, 星轮齿数 $Z_m = 39$, 内齿轮齿数 $Z_{r2} = 149$, 齿宽系数 $\phi_{d2} = 0.6$, 压力角 $\alpha_{n2} = 20^\circ$, 螺旋角 $\beta_2 = 22^\circ$; 输入轴转速 $n = 3000$ r/min, 输入功率 $P = 20000$ kW; 中心轮支撑刚度为 3×10^8 N · m⁻¹, 各齿轮偏心误差为 20 μm, 内外啮合齿频误差为 8 μm.

由于行星轮及星轮的内啮合与外啮合的均载系数基本相同, 因此, 文中仅用行星轮和星轮与太阳轮外啮合均载系数表示差动级和封闭级的均载系数, 图 3~图 7 为系统均载系数变化曲线.

为研究偏心误差对系统两级均载特性的影响程度,暂不考虑齿频误差的作用,内外啮合齿频误差按零计。

偏心误差单独作用下各行星轮及星轮均载系数曲线如图 3 所示,差动级均载系数为 1.023 3,封闭级的均载系数为 1.145 7,封闭级均载系数大于差动级。说明封闭级对偏心误差比较敏感,在偏心误差单独作用下,封闭级载荷分配不均比差动级严重。

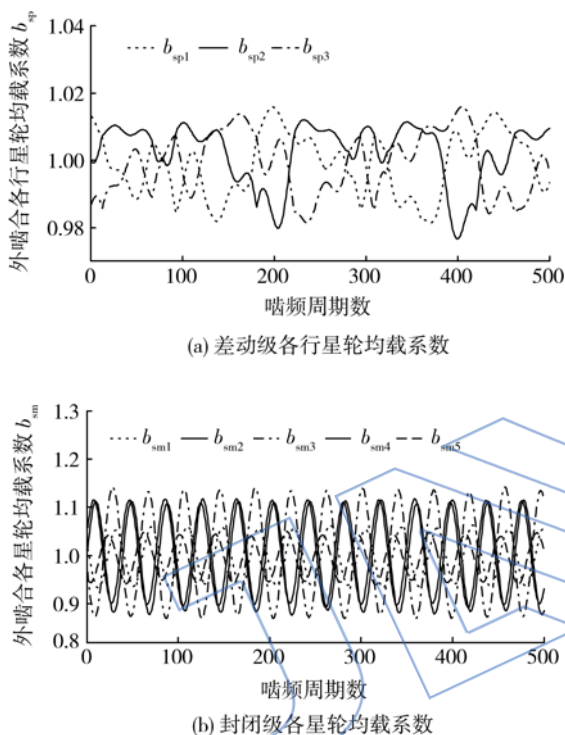


图 3 偏心误差单独作用下系统均载系数

Fig. 3 Load sharing coefficient of the train under the action of the run-out errors

差动级和封闭级均载系数对偏心误差敏感程度不同的原因在于:中心轮浮动能减小偏心误差引起的载荷不均^[14],但对行星轮或星轮超过 3 的轮系,均载效果不好^[15]。文中研究的封闭差动人字齿轮传动系统采用中心轮浮动均载措施,差动级行星轮个数为 3,为满足强度要求,封闭级选用 5 个星轮,星轮个数超过 3,中心轮浮动对降低由偏心误差造成的封闭级载荷不均的作用较小,所以封闭级均载系数大。

同样,为研究齿频误差对系统两级均载特性的影响程度,暂不考虑偏心误差的作用,各齿轮偏心误差按零计。

齿频误差单独作用下各行星轮及星轮均载系

数曲线如图 4 所示,差动级均载系数为 1.290 5,封闭级均载系数为 1.007 2,差动级均载系数大于封闭级。说明差动级对齿频误差比较敏感,在齿频误差单独作用下,差动级载荷分配不均比封闭级严重。

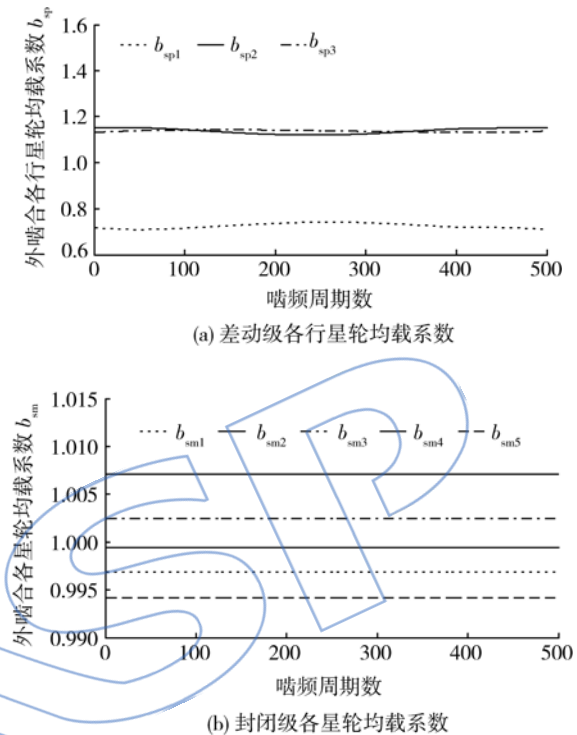


图 4 齿频误差单独作用下系统均载系数

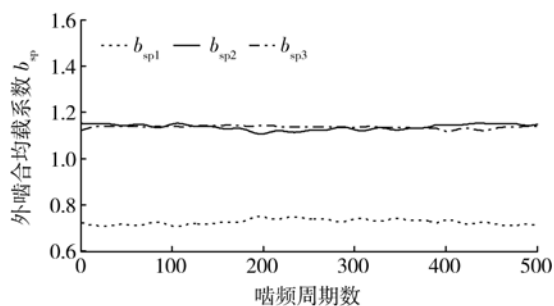
Fig. 4 Load sharing coefficient of the train under the action of the meshing-frequency errors

载荷越大,系统载荷分配越均衡^[16],均载系数越小。由行星传动理论可知封闭级太阳轮承担扭矩为差动级太阳轮承担扭矩的 Z_{r1}/Z_{s1} 倍,封闭级太阳轮载荷远大于差动级太阳轮,所以在齿频误差作用下,差动级均载系数对齿频误差的敏感程度远高于封闭级,差动级均载系数远大于封闭级。

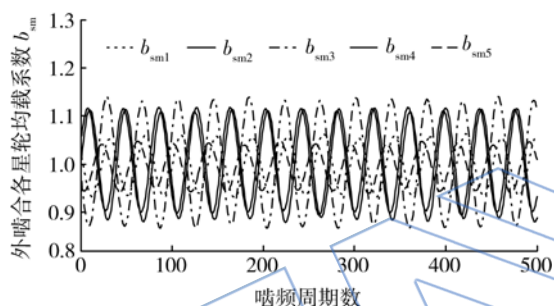
对比图 3(a)与图 4(a)可见,在差动级,偏心误差单独作用下均载系数远小于齿频误差单独作用下均载系数;对比图 3(b)与图 4(b)可见,在封闭级,偏心误差单独作用下均载系数远大于齿频误差单独作用下均载系数;对比图 3(b)和图 4(a)可见,偏心误差单独作用下封闭级均载系数远比齿频误差单独作用下差动级均载系数小,说明偏心误差造成封闭级的载荷不均远没有齿频误差造成差动级的载荷不均严重。

以上分别研究了偏心误差和齿频误差单独作

用下对系统两级均载系数影响的程度. 系统两级的均载系数是偏心误差和齿频误差共同作用的结果. 偏心误差和齿频误差共同作用下各行星轮和星轮的均载系数曲线如图5所示, 差动级均载系数为1.2918, 封闭级均载系数为1.1442, 差动级均载系数远大于封闭级均载系数.



(a) 差动级各行星轮均载系数



(b) 封闭级各星轮均载系数

图5 系统均载系数

Fig. 5 Load sharing coefficient of the train

在齿频误差($8\mu\text{m}$)不变情况下系统均载系数随偏心误差变化关系曲线如图6所示, 由图可见, 差动级均载系数基本不变化, 封闭级均载系数随偏心误差增加而增大; 在偏心误差($20\mu\text{m}$)不变情

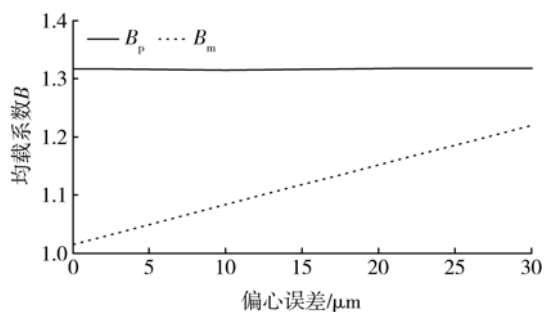


图6 系统均载系数随偏心误差变化关系

Fig. 6 Relationship between the load sharing coefficient of the train and the run-out errors

况下系统均载系数随齿频误差变化关系曲线如图7所示, 由图可见, 差动级均载系数随齿频误差增加而增大, 封闭级均载系数基本不变化.

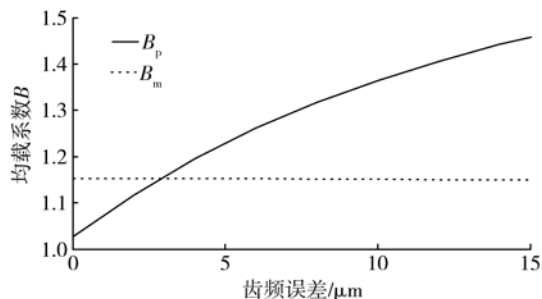


图7 系统均载系数随齿频误差变化关系

Fig. 7 Relationship between the load sharing coefficient of the train and the meshing-frequency errors

由图4(a)与图5(a)近似, 图3(b)与图5(b)近似, 以及图6与图7系统两级均载系数随偏心与齿频误差变化关系得出: 差动级均载系数主要由齿频误差决定, 随齿频误差增加而增大, 偏心误差对差动级均载系数基本没有影响; 封闭级均载系数主要由偏心误差决定, 随偏心误差的增加而增大, 齿频误差对封闭级均载系数基本没有影响.

由偏心与齿频误差对系统两级均载特性的影响可知, 差动级和封闭级承担载荷的巨大差别造成了差动级对齿频误差很敏感, 齿频误差单独作用下差动级均载系数远大于偏心误差单独作用下封闭级均载系数; 而差动级的均载系数主要由齿频误差决定, 封闭级均载系数主要由偏心误差决定, 所以, 在偏心误差和齿频误差共同作用下, 差动级均载系数远大于封闭级均载系数, 差动级行星轮载荷分配不均远比封闭级星轮严重.

6 结论

通过以上偏心与齿频误差对系统动态均载特性的影响分析, 可以得出如下结论:

1) 为满足强度要求, 封闭级采用5个星轮, 星轮个数超过3, 封闭级中心轮浮动减小偏心误差引起的载荷不均效果差, 所以封闭级均载系数对偏心误差较敏感, 偏心偏差对封闭级均载系数的影响大于差动级.

2) 齿频误差对系统两级均载系数的影响受载荷影响很大, 载荷越大越均载, 封闭级载荷远大于差动级, 所以差动级均载系数对齿频误差较敏

感,齿频误差对差动级均载系数的影响远大于封闭级。

3) 在差动级,偏心误差单独作用下均载系数远小于齿频误差单独作用下均载系数,差动级均载系数主要由齿频误差决定;在封闭级,齿频误差单独作用下均载系数远小于偏心误差单独作用下均载系数,封闭级均载系数主要由偏心误差决定。

4) 差动级均载系数随齿频误差的增加而增大,偏心误差的变化对差动级均载系数基本没有影响;封闭级均载系数随偏心误差的增加而增大,齿频误差的变化对封闭级均载系数基本没有影响。

5) 齿频误差对差动级均载系数的影响比偏心误差对封闭级均载系数的影响大,所以差动级均载系数大于封闭级,差动级行星轮载荷分配不均比封闭级星轮严重。

参考文献:

- [1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学:振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [2] Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmissions[J]. Mechanisms and Machine Theory, 1994, 29(8):1151-1165.
- [3] Kahraman A. Static load sharing characteristics of transmissions planetary gear sets: model and experiment[R]. Detroit: Society of Automotive Engineers, 1999.
- [4] Krantz T L. A method to analyze and optimize the load sharing of split-path transmissions[R]. NASA Technical Memorandum 107201, 1996.
- [5] Singh A, Kahraman A, Ligata H. Internal gear strains and load sharing in planetary transmissions: model and experiments[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7):072602(10 pages).
- [6] Ligata H, Kahraman A, Singh A. An experimental study of the influence of manufacturing errors on the planetary gear stresses and load sharing[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2008, 130(4):041701(9 pages).
- [7] Krantz T L, Delgado I R. Experimental study of split-path transmission load sharing[R]. NASA Technical Memorandum 107202, 1996.
- [8] 方宗德,沈允文,黄镇东. 2K-H 行星减速器的动态特性[J]. 西北工业大学学报, 1990, 10(4):361-371.
FANG Zongde, SHEN Yunwen, HUANG Zhendong. Dynamic characteristics of 2K-H planetary gearing[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 1990, 10(4):361-371. (in Chinese)
- [9] 袁茹,纪名刚. 航空行星减速器的振动特性分析[J]. 航空动力学报, 1995, 10(4):395-398.
YUAN Ru, JI Minggang. Analysis of vibration behavior in aerospace planetary reducer[J]. Journal of Aerospace Power, 1995, 10(4):395-398. (in Chinese)
- [10] 孙智民,沈允文,李素. 封闭行星齿轮传动系统的动态特性研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(2):44-48.
SHEN Zhimin, SHEN Yunwen, LI Suyou. Study on dynamic behavior of encased differential gear train[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(2):44-48. (in Chinese)
- [11] Maatar M, Velex P. An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics[J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 118(12):586-589.
- [12] Parker R G, Lin J. Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(3):365-370.
- [13] 方宗德,沈允文,黄镇东. 三路功率分流恒星式减速器的动态特性[J]. 航空学报, 1990, 11(7):341-350.
FANG Zongde, SHEN Yunwen, HUANG Zhendong. The dynamic behaving of star gearing with three branches[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1990, 11(7):341-350. (in Chinese)
- [14] Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmissions[J]. Mechanisms and Machine Theory, 1994, 29(8):1151-1165.
- [15] 饶振刚. 行星齿轮传动设计[M]. 北京:化学工业出版社, 2003.
- [16] 库德里亚夫采夫,基尔佳舍夫. 行星齿轮传动手册[M]. 北京:冶金工业出版社, 1986.